Variatierekening en Optimale Besturingstheorie

Datum : 19-04-2012
Tijd : 9.00-12.00

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw het scalaire systeem en kostencriterium

   $$\frac{d}{dt}x = u \qquad J(x_0, u) := \frac{1}{2}\left[gx(t_1)^2 + \int_0^{t_1} x(t)^2 + u(t)^2 dt\right]$$

   Hierbij is $g \in \mathbb{R}$ niet-negatief en $t_1 = \ln 2$.

   (a) Bepaal de Hamiltoniaan en de optimale besturing als functie van de co-toestand.

   (b) Leidt de differentiaalvergelijkingen voor de toestand en de co-toestand af en laat zien dat de algemene oplossing gegeven wordt door

   $$x(t) = ae^t + be^{-t} \qquad p(t) = -ae^t + be^{-t}$$

   met a, b nader te bepalen constanten.

   (c) Bepaal a en b als functie van g zodanig dat $x(0) = 2$ en zodanig dat p aan de eindvoorwaarde voldoet.

   (d) Bepaal de limieten van a en b voor het geval g naar oneindig gaat.

   (e) Geef de limietoplossing $x(t)$ voor $g = \infty$. Bepaal voor dit geval $x(t_1)$. Kunt u dit intuïtief verklaren?

   (f) Bepaal de optimale oplossing voor het geval ook de eindtoestand $x(t_1) = 0$ voorgeschreven is.

2. Beschouw het systeem

   $$\frac{d}{dt}y = \alpha y - u, \tag{1}$$

   met evenwichtspunt $y = 0$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is. Men zoekt voor dit systeem een stabiliserende regelaar die niet van α af hangt.

   (a) Laat zien dat de terugkoppeling $u = ky$ voor $k \in \mathbb{R}$ voldoende groot het evenwichtspunt $y = 0$ van het systeem asymptotisch stabiel maakt.

   Men redeneert nu als volgt. Omdat we α niet kennen, weten we dus ook niet hoe groot we k moeten nemen. Laat k dus van de tijd afhangen zodanig dat hij groeit zolang y niet naar nul gaat. Daartoe definiëren we k als de oplossing van

   $$\frac{d}{dt}k = y^2 - k \tag{2}$$

De term y^2 in het rechterlid van (2) zorgt er voor dat k groeit als y^2 groot is. De term $-k$ voorkomt dat k naar oneindig gaat als om wat voor reden dan ook y niet naar nul gaat.

(b) Elimineer u uit de differentiaalvergelijkingen (1), (2) voor y en k. Bepaal alle evenwichtspunten $(\bar{y}, \bar{k})$ van het resulterende stelsel differentiaalvergelijkingen in y en k. Maak daarbij onderscheid tussen de gevallen $\alpha > 0$ en $\alpha \leq 0$.

(c) Onderzoek door middel van linearisatie de (lokale) stabiliteit van alle evenwichtspunten. Behandel ook hier $\alpha > 0$ en $\alpha \leq 0$ apart.

(d) Laat nu $\alpha < 0$. Laat door middel van een geschikte Lyapunov functie zien dat voor iedere (y_0, k_0) geldt:

$$\lim_{t\to\infty} (y(t), k(t)) = (0, 0) \tag{3}$$

(e) Geldt (3) ook voor het geval $\alpha = 0$?

(f) Het doel was een regelaar te vinden die het systeem stabiliseert ongeacht de waarde van α. Wat vindt u, gezien uw antwoorden op bovenstaande vragen, van de voorgestelde regelaar? Voldoet hij aan het doel?

3. We willen een karretje dat over een rechte rail kan bewegen vanuit de oorsprong (een gemarkeerd punt op de rail) in minimale tijd naar een ander punt op de rail sturen. De stuurvariable is de versnelling die we binnen gegeven grenzen kunnen variëren. Een sterk vereenvoudigd dynamisch model voor het karretje wordt gegeven door

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u \qquad |u(t)| \leq 1 \tag{4}$$

Om het tijd-optimale besturingsprobleem op te lossen herschrijven we eerst (4) in toestandsvorm

$$\frac{d}{dt}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{5}$$

met toestand $x = (y, \frac{d}{dt}y)^T$.

Op het tijdstip $t = 0$ staat het karretje stil op het gemarkeerde punt van de rail. Dit komt overeen met $x(0) = (0, 0)$. Het doel is om het karretje in zo kort mogelijke tijd tot stilstand te laten komen op gegeven afstand $a > 0$ van het markeringspunt. Dit komt overeen met eindtoestand $(a, 0)$ voor het toestandsmodel.

(a) Stel de Hamiltoniaan op, en geef de differentiaalvergelijking voor de co-toestand p. Bepaal hiervan de algemene oplossing.

(b) Leidt uit de algemene oplossing voor de co-toestand het maximaal aantal tekenwisselingen in de optimale besturing u af.

(c) Bepaal op fysische gronden de volgorde waarin de tijd-optimale besturing positieve en negatieve waarden aanneemt.

(d) Noem het moment van tekenwisseling t_1 en het optimale eindtijdstip t_e. Schrijf $x(t_e)$ in termen van t_1 en t_e. Hint: De toestandsvergelijkingen zijn zeer eenvoudig op te lossen voor zowel het geval $u = 1$ als $u = -1$. De integratieconstanten kunnen bepaald worden uit $x(0) = (0, 0)$ en het feit dat x continu is in $x(t_1)$.

(e) Laat zien dat $x(t_e) = (a, 0)$ impliceert dat $t_1 = \sqrt{a}$ en $t_e = 2\sqrt{a}$.

(f) Bepaal voor $a = 4$ de optimale besturing en schets het bijbehorende toestandstraject. Geef in deze schets duidelijk het punt aan waar de besturing van teken wisselt.

(g) Neem nu aan dat het karretje tegen een steeds steilere heuvel aanrijdt, en dat de bewegingsvergelijkingen (4) veranderen in

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y + u \qquad |u(t)| \leq 1 \tag{6}$$

Beantwoord de onderdelen (a),(b) en (c) voor dit geval. Voor welke waarden van $a > 0$ heeft het tijd-optimale probleem in dit geval een oplossing ?

Puntenverdeling: Gratis 10

1. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5, e: 5, f: 5.

2. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5, e: 5, f: 5.

3. a: 5, b: 4, c: 4, d: 4, e: 4, f: 4, g: 5.